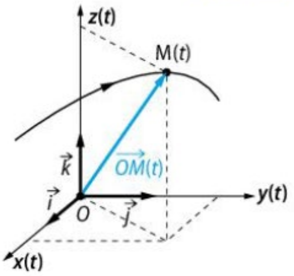
## 1 Les vecteurs du mouvement

**Représentation du vecteur position**

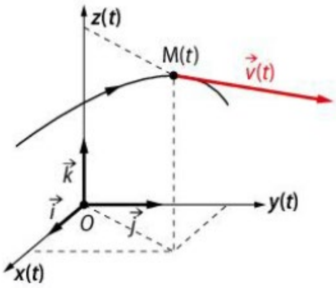



$$\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

**Construction du vecteur vitesse**

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$$

Sa direction est tangente à la trajectoire
Son sens est celui du mouvement
Sa norme s'exprime en $m \cdot s^{-1}$

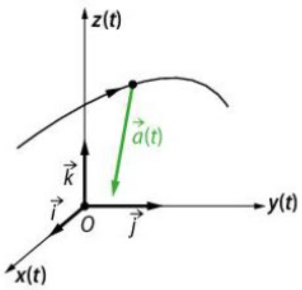



$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \end{pmatrix}$$

**Variation du vecteur vitesse : le vecteur accélération**

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

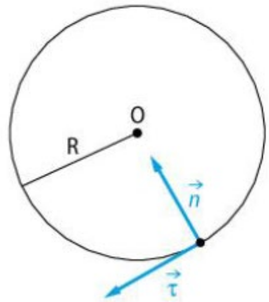
La norme du vecteur accélération s'exprime en $m \cdot s^{-2}$.




$$\vec{a} = \begin{pmatrix} \frac{dv_x}{dt} \\ \frac{dv_y}{dt} \\ \frac{dv_z}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d^2x}{dt^2} \\ \frac{d^2y}{dt^2} \\ \frac{d^2z}{dt^2} \end{pmatrix}$$

## 2 Le repère de Frenet

**Décomposition des vecteurs vitesse et accélération**

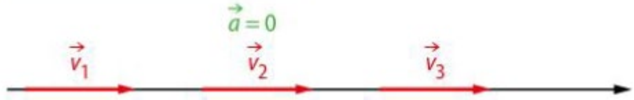



$$\vec{v} = v\vec{\tau} = \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix}$$

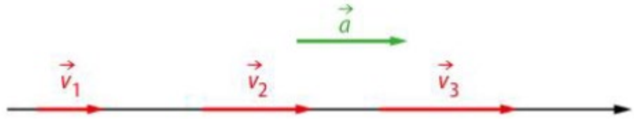
$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + \frac{v^2}{R}\vec{n} = \begin{pmatrix} \frac{dv}{dt} \\ \frac{v^2}{R} \end{pmatrix}$$

## 3 Les vecteurs du mouvement

**Mouvements rectilignes : représentations**



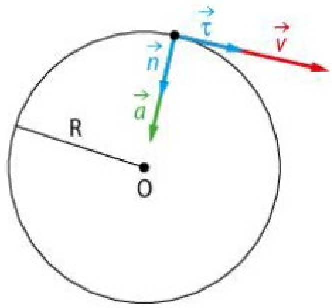

rectiligne uniforme



rectiligne uniformément accéléré

rectiligne uniformément ralenti

**Mouvements circulaires uniformes : représentation et coordonnées des vecteurs vitesse et accélération**




$$\vec{v} = v\vec{\tau} = \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} = \frac{v^2}{R}\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v^2}{R} \end{pmatrix}$$

d'où $a = \dfrac{v^2}{R}$

## Exo01-Série03-Chapitre 04-Description d'un mouvement

### Lancer vertical

La position d'un objet lancé depuis l'altitude $h$ à la vitesse $v_0$ est donnée par l'expression :

$$\overrightarrow{OM} = \left(-\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + h\right)\vec{k}$$

($\vec{k}$ est vertical, vers le haut et $g = 9{,}8\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$)

**1. a.** Donner l'expression de la vitesse de cet objet au cours du temps.
**b.** Montrer que le vecteur vitesse change de sens à un moment donné que l'on exprimera en fonction de $v_0$ et $g$.

**2.** Exprimer le vecteur accélération de cet objet et l'identifier à partir de ses caractéristiques.

## Exo02

### Saut d'un tremplin en vélo

Un cycliste s'élance sur un tremplin de 2,0 m de haut. Arrivé en haut, sa vitesse lui permet de faire un saut. Les expressions des coordonnées du centre de masse du système {vélo + cycliste} durant ce saut ont été modélisées par des équations mathématiques. :

$$\begin{cases} x(t) = 3{,}39 \times t \\ y(t) = -4{,}9 \times t^2 + 5{,}87 \times t + 2{,}0 \end{cases}$$

Les coordonnées $x(t)$ et $y(t)$ sont exprimées en mètre, à condition que $t$ soit en seconde.

**1. a.** Déterminer les composantes du vecteur vitesse au cours du temps.
**b.** En déduire la valeur de la vitesse à $t = 1{,}0$ s.

**2. a.** Déterminer les composantes du vecteur accélération au cours du temps.
**b.** Quelles remarques peut-on faire pour ce vecteur ?
**c.** Calculer la valeur de l'accélération au cours du mouvement.

## Exo03

### Le looping

Un looping est une figure de pilotage aérien que l'on assimilera à une trajectoire circulaire.

**1.** Rappeler les expression générales des composantes du vecteur accélération dans le repère de Frenet.

**2.** Les expressions en un point de la trajectoire des vecteurs vitesse et accélération dans ce repère sont, à un instant donné :

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 40{,}0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{a} = \begin{pmatrix} -6{,}50 \\ 106{,}0 \end{pmatrix} \text{ (en unité SI).}$$

**a.** Comment évolue la vitesse à l'instant considéré ?
**b.** Quel est le rayon de la trajectoire ?

## Exo04

### Un tour de manège

Un manège de 16,0 m de diamètre, animé d'un mouvement circulaire uniforme autour d'un axe vertical, fait un tour complet en 2,40 s.

**1.** Faire un schéma de la situation, vu de dessus. Représenter sur le schéma les vecteurs vitesse et accélération dans le repère de Frenet.

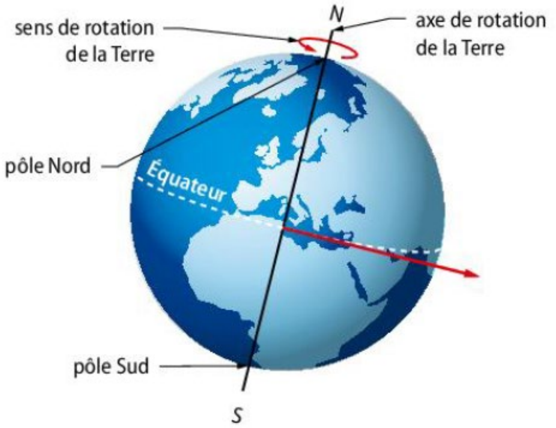
**2. a.** Calculer la vitesse pour un point se trouvant à la périphérie du manège.
**b.** Déterminer les composantes de ces vecteurs dans la base du repère de Frenet.

**3.** Mêmes questions pour un point se trouvant à 4 m de l'axe de rotation.

**Exo05**

### Accélération à l'équateur

Le rayon de la Terre est $R = 6{,}4 \cdot 10^3$ km.




**1.** On étudie le mouvement d'un point se trouvant à la surface de la Terre, au niveau de l'équateur, dans un référentiel dont l'origine est le centre de la Terre et dont les axes sont orientés vers des étoiles lointaines (référentiel géocentrique)

**a.** Quel est le type de mouvement de ce point ?

**b.** Calculer le périmètre de la Terre au niveau de l'équateur. En déduire la vitesse de ce point.

**c.** Rappeler le lien entre vitesse et accélération pour ce type de mouvement. Décrire le vecteur accélération pour ce point.

**2.** L'accélération de la pesanteur terrestre vaut $g = 9{,}8$ m · s$^{-2}$. Comparer le vecteur accélération de la pesanteur à celui décrit à la question précédente. S'agit-il de la même accélération ? Proposer une explication.

**Exo06**

### Saut au-dessus du canal de Corinthe

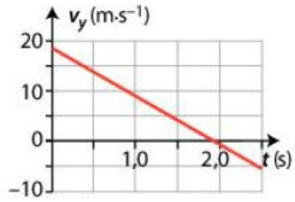
En avril 2010, le pilote de moto Robbie MADDISON a pris son élan pour franchir le canal de Corinthe.
Le mouvement du centre de masse G du système {R. MADDISON et sa moto} est étudié dans un référentiel terrestre supposé galiléen. À l'instant $t = 0$ s, il se trouve à l'origine du repère et quitte le tremplin. Son vecteur vitesse $\vec{v}_0$ fait un angle $\alpha = 33°$ avec l'axe horizontal et a pour valeur 125 km · h$^{-1}$.

**1. a.** Utiliser la chronophotographie ci-dessous pour montrer que le mouvement suivant l'axe (O$x$) est uniforme.


**b.** Montrer que si le poids est la seule force qui s'applique sur le système, le vecteur accélération est vertical.

**c.** Vérifier que les réponses aux deux questions précédentes sont cohérentes entre elles.

**2. a.** En utilisant l'allure de la courbe ci-contre, justifier que le mouvement suivant l'axe vertical est uniformément varié.

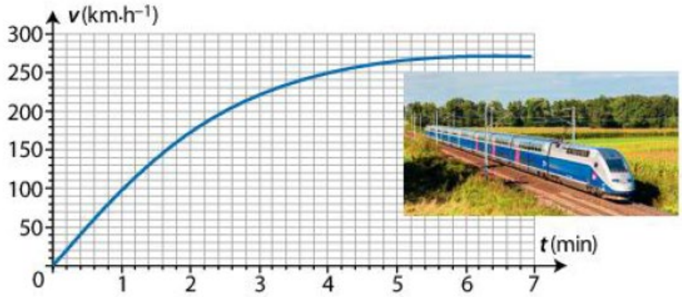



**b.** Quelle position particulière de la trajectoire est occupée par G à la date pour laquelle $v_y = 0$ ? Quelle est alors la valeur de la vitesse ?

**Exo07**

### Accélération d'un TGV

L'étude du mouvement du centre de masse G d'une rame de TGV se déplaçant en ligne droite donne les résultats suivants :




**1.** Expliquer comment déterminer graphiquement la valeur $a_G$ de l'accélération.

**2.** Comment la valeur de l'accélération évolue-t-elle au cours du temps ?

**3.** Caractériser le vecteur accélération à $t = 2$ min, instant de la photographie.

# *Corrigé de la Série 03*--Chapitre 04-Description d'un mouvement

## Exo01

**1. a.** $\vec{v}_M = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$ d'où $\vec{v}_M = (-g \cdot t + v_0)\vec{k}$.

**b.** Au début du mouvement, l'objet a un mouvement vers le haut : $v_0 > g \cdot t$. Puis $t$ augmente jusqu'à ce que $v_0 = g \cdot t$, soit $t = \dfrac{v_0}{g}$. À ce moment, le vecteur vitesse devient nul. L'instant d'après, $g \cdot t > v_0$ : le vecteur vitesse est dirigé vers le bas.

**2.** $\vec{a}_M = \dfrac{d\vec{v}_M}{dt}$ d'où $\vec{a}_M = -g \cdot \vec{k}$.

Il s'agit d'un vecteur vertical, dirigé vers le bas et de norme $g = 9{,}8$ m · s$^{-2}$.

## Exo02

**1. a.** $\vec{v} = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$, d'où, en dérivant chacune des coordonnées :

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 3{,}39 \\ -9{,}8 \times t + 5{,}87 \end{pmatrix}$$

**b.** À $t = 1{,}0$ s, on a :

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 3{,}39 \\ -9{,}8 \times 1{,}0 + 5{,}87 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3{,}39 \\ -3{,}93 \end{pmatrix}$$

D'où $v = \sqrt{3{,}39^2 + (-3{,}93)^2}$

$v = 5{,}19$ m · s$^{-1}$

**2. a.** $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$

d'où en dérivant chacune des coordonnées :

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -9{,}8 \end{pmatrix}.$$

**b.** Ce vecteur est constant, vertical et orienté vers le bas.

**c.** $a = \sqrt{0 + (-9{,}8)^2} = 9{,}8$ m · s$^{-2}$.

## Exo03

**1.** $\vec{a} = \dfrac{dv}{dt}\vec{\tau} + \dfrac{v^2}{R}\vec{n}$

**2. a.** La vitesse diminue au cours du temps car, par identification :

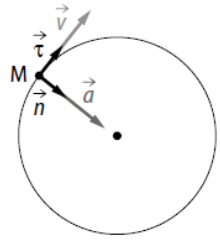
$\dfrac{dv}{dt} = -6{,}50$ SI.

**b.** On a $\dfrac{v^2}{R} = 106{,}0$ SI avec $v = 40$ SI.

Ainsi, $R = \dfrac{40^2}{106} = 15{,}1$ m.

## Exo04

**1.** *Il est précisé, dans le manuel élève et les manuels numériques, qu'on étudie un point situé à la périphérie du manège.*




**2. a.** $v = \dfrac{p}{T}$, où $p$ est le périmètre du cercle ($p = 2\pi \times R$) et $T$ la période de rotation.

Ainsi, $v = \dfrac{\pi \times 16}{2{,}4} = 20{,}9$ m · s$^{-1}$.

**b.** Dans la base de Frenet :

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ soit } \vec{v} = \begin{pmatrix} 20{,}9 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } \vec{a} = \begin{pmatrix} \dfrac{dv}{dt} \\ \dfrac{v^2}{R} \end{pmatrix}, \text{ soit } \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 54{,}8 \end{pmatrix}.$$

**3.** Si le point M est à $R = 4$ m, on a les valeurs suivantes :

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 10{,}5 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 27{,}4 \end{pmatrix}.$$

## Exo05

**1. a.** Le mouvement d'un point à la surface de l'équateur est circulaire uniforme.

**b.** Le périmètre de la Terre à l'équateur est :

$p = 2\pi \cdot R = 2 \times \pi \times 6{,}4 \times 10^6$

$= 4{,}0 \times 10^7$ m.

La vitesse est $v = \dfrac{p}{T}$ avec $T = 24$ h.

D'où $v = \dfrac{4{,}0 \times 10^7}{24 \times 60 \times 60} = 4{,}7 \times 10^2$ m · s$^{-1}$

$= 1{,}7 \times 10^3$ km · h$^{-1}$

**c.** Pour un mouvement circulaire uniforme, $a = \dfrac{v^2}{R}$.

Dans ce cas : $a = \dfrac{(4{,}7 \times 10^2)^2}{6{,}4 \times 10^6} = 3{,}4 \times 10^{-2}$ m · s$^{-2}$.

Le vecteur accélération est radial et centripète (dirigé vers le centre de la Terre). Avec le repère de Frenet, son expression vectorielle serait :

$\vec{a} = 3{,}4 \times 10^{-2}\, \vec{n}$.

**2.** Les deux valeurs sont très différentes. L'accélération de la pesanteur, presque 300 fois plus intense, est essentiellement due, en réalité, à la force gravitationnelle. L'accélération calculée à la question **1** est due au mouvement de rotation de la Terre et sa contribution est faible.

## Exo06

### Saut au-dessus du canal de Corinthe

**1. a.** On projette sur l'axe (O$x$) la position du centre de masse G du système étudié.


Les espaces parcourus horizontalement entre deux positions consécutives de G sont quasiment égaux.
Le mouvement de G suivant l'axe (O$x$) est uniforme.

**b.** D'après la deuxième loi de Newton appliquée au système dans un référentiel terrestre supposé galiléen, $\sum\vec{F} = m\vec{a}_G$.

Si la seule force appliquée au système est le poids $\vec{P}$, il vient $\vec{P} = m\vec{a}_G$. $\vec{P}$ et $\vec{a}_G$ sont donc colinéaires et de même sens. Le vecteur accélération $\vec{a}_G$ est donc vertical.

**c.** Si le vecteur accélération $\vec{a}_G$ est vertical, sa coordonnée horizontale est nulle, et donc le mouvement horizontal s'effectue à vitesse de valeur constante : il est uniforme suivant l'axe (O$x$). Les réponses aux questions **a.** et **b.** sont donc cohérentes entre elles.

**2. a.** La coordonnée verticale de la vitesse $v_y$ est une fonction affine du temps, de la forme : $v_y(t) = a \times t + \text{b}$.

La coordonnée verticale $a_y = \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}$ s'identifie au coefficient directeur de la droite, soit, graphiquement, de l'ordre de 10 m·s$^{-2}$ ; ainsi, $a_y = g$ = constante. Le mouvement vertical de G est uniformément accéléré.

**b.** Lorsque la valeur de la vitesse verticale est nulle ($v_y = 0$ m·s$^{-1}$), la seule coordonnée de la vitesse qui demeure est $v_x$. Le vecteur vitesse $\vec{v}$ est horizontal ; il est tangent à la trajectoire à l'instant considéré qui est par conséquent le sommet de la parabole. On a alors :

$v = \sqrt{(v_x)^2} = |v_x|$ soit $v = v_0 \times \cos\alpha$ ;

$v = 125\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1} \times \cos(33°) = 105\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1}$.

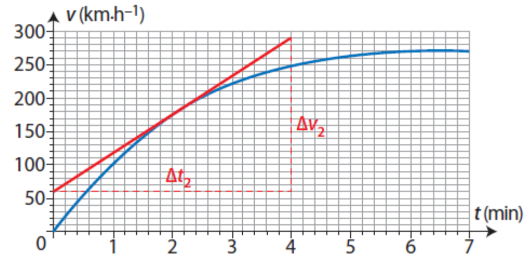
## Exo07

### Accélération d'un TGV

**1.** Pour déterminer graphiquement la valeur $a_G$ de l'accélération, il faut déterminer les coefficients directeurs des tangentes à la courbe aux dates considérées.

**2.** Le coefficient directeur de la tangente à la courbe diminue au cours du temps ; la valeur de l'accélération diminue au cours du temps.

**3.**




À chaque instant, le coefficient directeur de la tangente à la droite est donné par le rapport $\frac{\Delta v}{\Delta t}$.

À $t_2 = 2$ min, $a_2 = \frac{\Delta v_2}{\Delta t_2}$ soit $a_2 = \frac{\frac{230 \times 10^3}{3\ 600}\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}}{240\ \text{s}}$.

$a_2 = 2{,}66 \times 10^{-1}\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.

À la date $t = 2$ min, le vecteur accélération a pour caractéristiques :

– direction : la droite (voir la photographie) suivant laquelle se déplace la rame ;

– sens : le même que celui de $\vec{v}$ car le mouvement de la rame est accéléré.

– valeur : $a_2 = 2{,}66 \times 10^{-1}\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.